Производная второго порядка.

Физический смысл производной второго порядка.

1. Производная второго порядка:

Если существует производная от производной y' функции $y = f(x)$, то она называется производной второго порядка (или второй производной): $y'' = (y')' = (f'(x))' = f''(x)$

Пример: $y = 2x^4 \quad y'' - ?$

Решение: $y' = (2x^4)' = 2 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 8 \cdot x^3$

$$y'' = (8x^3)' = 8 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 24 \cdot x^2$$

2. Физический смысл второго порядка:

Пусть точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$; где S - путь, пройденный точкой за время t.

Скорость движения точки – это производная пути по времени: $V = S'$.

Ускорение движения точки – это производная от скорости по времени: $a = V'$.

Отсюда по определению производной второго порядка следует, что $a = V' = (S')' = S''$, т.е. ускорение – это вторая производная пути по времени.

Если ускорение является постоянной величиной при любом значении времени t, то говорят, что движение точки происходит с постоянным ускорением.

3. Рассмотрим физические приложения производной первого и второго порядка.

1) Прямолинейное движение: $V = S'$; $a = V'$.

Пример: Точка движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 - 2t + 4$ $(м.)$. Вычислить скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 6c.$

Решение: $V = S' = (3t^2 - 2t + 4)' = 3 \cdot 2 \cdot t - 2 \cdot 1 + 0 = 6t - 2(м/c).$

$$V(t_0) = V(6) = 6 \cdot 6 - 2 = 36 - 2 = 34(м/c).$$

$$a = S'' = V' = (6t - 2)' = 6 \cdot 1 - 0 = 6(м/c^2).$$

Значит движение происходит с постоянным ускорением.

2) Вращательное движение:

При вращательном движении угловой скоростью называется скорость ω изменения угла поворота φ за время t.

Угловая скорость равна производной угла поворота φ по времени t: $\omega = \varphi'$.

Угловое ускорение ε равно производной от угловой скорости ω по времени: $\varepsilon = \omega'$.

Пример: При торможении маховик за t $(c.)$ поворачивается на угол $\varphi = 3 + 8t - t^2$.

Найти: 1) $\omega - ?, \varepsilon - ?$ в момент времени $t_0 = 3c.$

2) момент времени t, когда вращение прекратится.

Решение: 1) $\omega = \varphi' = (3+8t-t^2)' = 0+8\cdot 1-2\cdot t = 8-2t \quad (рад/с)$; $\omega(3) = 8-2\cdot 3 = 8-6 = 2\ (рад/с)$;

$\varepsilon = \omega' = (8-2t)' = 0-2\cdot 1 = -2$

2) Движение прекратится если угловая скорость будет равна нулю, т.е. $\omega = 0$:

$8-2t = 0$; $8 = 2t$; $t = 4c.$

3) Изменение температуры тела:

При нагревании тела его температура изменяется в зависимости от времени по закону $T = f(t).$

Тогда скорость нагревания тела – это производная температуры тела по времени (T')

Пример: Закон изменения тела T задан соотношением $T = 0{,}2\cdot t^2$, где t - время. С какой скоростью нагревается тело в момент времени $t_0 = 10c$?

Решение: $T' = (0{,}2\cdot t^2)' = 0{,}2\cdot 2\cdot t = 0{,}4t$

$T'(10) = 0{,}4\cdot 10 = 4$

Список заданий для решения на уроке.

1) Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найти величины скорости и ускорения в момент времени $t = 2c.$ (32 м/с; 22 м/с^2)

2) Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 - 8t + 4$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю? (t=4с.)

3) Точка движется прямолинейно по закону $S = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 3$. Найти величины скорости и ускорения.

4) Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями: $S_1 = 4t^2 + 2$, $S_2 = 3t^2 + 4t - 1$. Найти скорости точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

5) Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями: $S_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $S_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$. Найти ускорение в тот момент времени, когда их скорости равны.

6) Тело массой $m = 12кг$ движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t + 3$.

Найти кинетическую энергию тела $\left(\frac{m\cdot v^2}{2}\right)$ через пять секунд после начала движения.(864 Дж.)

7) Вычислить скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = 4\sin 3t$, в моменты времени $t_0 = \frac{\pi}{9}$. (6 м/с)

8) Вычислить скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = tg\,2t$, в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{6}$. (8 м/с)

9) Сила тока $I(A)$ изменяется в зависимости от времени по закону $I = 3t^2 + 2t + 1$. Найти скорость изменения силы тока через 8с. (50 А/с)