Формулы приведения

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции таких углов как $-\alpha$, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через тригонометрические функции угла α.

При этом можно использовать следующее правило:

1. Если аргумент содержит $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то название функции заменяется на сходное (синус – на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс). В противном случае функция остается прежней.

2. Знак правой части формулы приведения определяется знаком левой части в предположении, что угол $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Пример:

1) $Sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=Cos\alpha$

Синус сменился на косинус т.к. аргумент функции содержит $\frac{\pi}{2}$. Правая часть имеет знак плюс т.к. угол$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ - это угол второй четверти, в которой синус имеет знак плюс.

2) $Cos(\pi+\alpha)=-Cos\alpha$

Функция не изменила название т.к. аргумент функции не содержит ни $\frac{\pi}{2}$, ни $\frac{3\pi}{2}$. Правая часть имеет знак минус т.к. угол$(\pi+\alpha)$ - это угол третьей четверти, в которой косинус имеет знак минус.

Пример: Приведите к функциям угла, меньшего 45°: $Sin125^\circ$, $Cos247^\circ$, $tg215^\circ$

Решение:

$Sin125^\circ=Sin(90^\circ+35^\circ)=Cos35^\circ$

$Cos247^\circ=Cos(270^\circ-23^\circ)=-Sin23^\circ$

$tg215^\circ=tg(180^\circ+35^\circ)=tg35^\circ$

Задание. Приведите к функциям угла, меньшего 45°:

a) $Sin168^\circ$ b) $Cos123^\circ$ c) $tg124^\circ$ d) $tg263^\circ$

e) $Cos279^\circ$ f) $Sin391^\circ$ g) $tg700^\circ$ h) $Ctg729^\circ$

i) $Ctg194^\circ$ j) $Sin(-77^\circ)$ k) $Cos(-83^\circ)$ l) $tg(-125^\circ)$

m) $Cos(-161^\circ)$ n) $tg(-263^\circ)$ o) $Sin2012^\circ$ p) $Cos(-1952^\circ)$

Формулы сложения

$Sin(\alpha+\beta)=Sin\alpha\cdot Cos\beta+Sin\beta\cdot Cos\alpha$ **(1)**

$Sin(\alpha-\beta)=Sin\alpha\cdot Cos\beta-Sin\beta\cdot Cos\alpha$ **(2)**

$Cos(\alpha+\beta)=Cos\alpha\cdot Cos\beta-Sin\alpha\cdot Sin\beta$ **(3)**

$Cos(\alpha-\beta)=Cos\alpha\cdot Cos\beta+Sin\alpha\cdot Sin\beta$ **(4)**

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ **(5)**

$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ **(6)**

Пример: Вычислить $Sin105^\circ$

Преобразуем угол, $Sin105^\circ=Sin(60^\circ+45^\circ)$

Используя формулу (1) получим $Sin105^\circ=Sin(60^\circ+45^\circ)=Sin60^\circ\cdot Cos45^\circ+Sin45^\circ\cdot Cos60^\circ=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Пример: Дано: $Sin\alpha=0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти: $Cos(60^\circ-\alpha)$

Решение: Найдем $Cos\alpha$ воспользовавшись формулой $Cos\alpha=\pm\sqrt{1-Sin^2\alpha}$

$Cos\alpha=\pm\sqrt{1-Sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-0.36}=\pm0.8$

Так как угол α это угол второй четверти по условию, а во второй четверти косинус имеет знак минус, следовательно: $Cos\alpha=-0.8$

Используя формулу (4) получим $Cos(60^\circ-\alpha)=Cos60^\circ\cdot Cos\alpha+Sin60^\circ\cdot Sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot(-0.8)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.6=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{10}$

Пример: Доказать тождество $Sin(\alpha+\beta)-Sin(\alpha-\beta)=2Cos\alpha\cdot Sin\beta$

$Sin(\alpha+\beta)-Sin(\alpha-\beta)=Sin\alpha\cdot Cos\beta+Sin\beta\cdot Cos\alpha-(Sin\alpha\cdot Cos\beta-Sin\beta\cdot Cos\alpha)=$

$=Sin\alpha\cdot Cos\beta+Sin\beta\cdot Cos\alpha-Sin\alpha\cdot Cos\beta+Sin\beta\cdot Cos\alpha=2Cos\alpha\cdot Sin\beta$ ч.т.д.

Задание 1. Вычислить, используя формулы сложения:

1. $Cos105^\circ$
2. $Sin75^\circ$
3. $Cos15^\circ$
4. $tg15^\circ$
5. $Sin14^\circ\cdot Cos31^\circ+Sin31^\circ\cdot Cos14^\circ$
6. $Sin55^\circ\cdot Cos35^\circ+Sin35^\circ\cdot Cos55^\circ$
7. $Sin63^\circ\cdot Cos33^\circ-Cos63^\circ\cdot Sin33^\circ$
8. $Cos5^\circ\cdot Cos40^\circ-Sin5^\circ\cdot Sin40^\circ$
9. $Cos127^\circ\cdot Cos37^\circ+Sin37^\circ\cdot Sin127^\circ$
10. Вычислить $Sin(30^\circ+\alpha)$, если $Cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.
11. Вычислить $Cos(\alpha+45^\circ)$, если $Cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
12. Вычислить $Cos(\alpha+\beta)$, если $Sin\alpha=0.8$, $Cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.
13. Вычислить $Sin(\alpha+\beta)$, если $Cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$, $Cos\beta=\dfrac{4}{5}$ $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Доказать тождество:

1. $Cos(x+y)\cdot Cos(x-y)=Cos^2y-Sin^2x$
2. $Sin(x+y)\cdot Sin(x-y)=Sin^2x-Sin^2y$

Формулы двойного аргумента

Пусть $\beta = \alpha$, тогда формулы (1), (3), (5) будут иметь следующий вид:

$Sin(\alpha+\alpha) = Sin\alpha \cdot Cos\alpha + Sin\alpha \cdot Cos\alpha$ следовательно $\boxed{Sin2\alpha = 2Sin\alpha \cdot Cos\alpha}$ **(7)**

$Cos(\alpha+\alpha) = Cos\alpha \cdot Cos\alpha - Sin\alpha \cdot Sin\alpha$ следовательно $\boxed{Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sin^2\alpha}$ **(8)**

$tg(\alpha+\alpha) = \dfrac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha}$ следовательно $\boxed{tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$ **(9)**

Пример: Вычислить $Sin2\alpha$, если $Sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: Найдем $Cos\alpha$ воспользовавшись формулой $Cos\alpha = \pm\sqrt{1 - Sin^2\alpha}$

$Cos\alpha = \pm\sqrt{1 - Sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{1}{2}$

Так как угол α это угол второй четверти по условию, а во второй четверти косинус имеет знак минус, следовательно: $Cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

Используя формулу (7) получим $Sin2\alpha = 2 \cdot Sin\alpha \cdot Cos\alpha = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Задание 1: Найдите $Sin2\alpha$, $Cos2\alpha$, $tg2\alpha$, $Ctg2\alpha$, если

1. $Sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
2. $Cos\alpha = -0.6$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$
3. $Sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
4. $Cos\alpha = 0.96$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
5. $Sin\alpha = -\dfrac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Задание 2: Доказать тождество:

1. $Cos^4 2\alpha - Sin^4 2\alpha = Cos4\alpha$
2. $\dfrac{Cos\alpha}{Sin\alpha} - \dfrac{Sin\alpha}{Cos\alpha} = 2Ctg2\alpha$

Формулы половинного аргумента

Воспользуемся формулой $Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sin^2\alpha$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $Sin^2\alpha = 1 - Cos^2\alpha$.

Подставив это значение в формулу для косинуса двойного угла получим:

$Cos2\alpha = Cos^2\alpha - (1 - Cos^2\alpha) = Cos^2\alpha - 1 + Cos^2\alpha = 2Cos^2\alpha - 1$

Таким образом: $Cos^2\alpha = \frac{1 + Cos2\alpha}{2}$ или $Cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos2\alpha}{2}}$ **(10)**

$$\boxed{Cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos\alpha}{2}}} \quad (11)$$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $Cos^2\alpha = 1 - Sin^2\alpha$.

Подставив это значение в формулу для косинуса двойного угла получим:

$Cos2\alpha = 1 - Sin^2\alpha - Sin^2\alpha = 1 - 2Sin^2\alpha$

Таким образом: $Sin^2\alpha = \frac{1 - Cos2\alpha}{2}$ или $Sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos2\alpha}{2}}$ **(12)**

$$\boxed{Sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\alpha}{2}}} \quad \textbf{(13)}$$

Пример: Вычислить $Sin\frac{\alpha}{2}$, если $Sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: Найдем $Cos\alpha$ воспользовавшись формулой $Cos\alpha = \pm\sqrt{1 - Sin^2\alpha}$

$$Cos\alpha = \pm\sqrt{1 - Sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

Так как угол α это угол второй четверти по условию, а во второй четверти косинус имеет знак минус, следовательно: $Cos\alpha = -\frac{5}{13}$

Используя формулу (13) получим:

$$Sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{18}{26}} = \pm\sqrt{\frac{9}{13}}$$

Для того, чтобы определить знак $Sin\frac{\alpha}{2}$ необходимо неравенство $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ разделить на 2, получим $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, угол $\frac{\alpha}{2}$, находится в первой четверти, а значит, синус имеет знак плюс, т. е. $Sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{13}}$

Задание: Найти $Sin\frac{\alpha}{2}$, $Cos\frac{\alpha}{2}$ если

1. $Sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
2. $Cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3. $Sin\alpha = -0.8$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
4. $Cos\alpha = \frac{8}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$