Справочный материал для решения показательных уравнений

1) Свойства степени:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

2) Уравнение вида $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ **равносильно уравнению** $\boxed{f(x) = g(x)}$

Пример: $2^{x^2-4x+1} = 2^{x-7} \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 7$

3) Способы решения показательных уравнений:

а) Приведение к одному основанию →

$$5^x \cdot \frac{1}{5} = 125^x \cdot \sqrt{5}$$
$$5^x \cdot 5^{-1} = (5^3)^x \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$
$$5^{x-1} = 5^{3x} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$
$$5^{x-1} = 5^{3x+0,5}$$
$$x - 1 = 3x + 0,5$$
$$x - 3x = 0,5 + 1$$
$$-2x = 1,5 / : (-2)$$
$$x = -0,75$$

б) Вынесение за скобку →

$$7^x - 7^{x-1} + 7^{x+1} = 55$$
$$7^{x-1} \cdot \left(7^1 - 7^0 + 7^2\right) = 55$$
$$7^{x-1} \cdot (7 - 1 + 49) = 55$$
$$7^{x-1} \cdot 55 = 55 / : 55$$
$$7^{x-1} = 1$$
$$7^{x-1} = 7^0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

в) Замена переменной →

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$
$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$
$2^x = t$ – *замена*

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$t_1 = 1; t_2 = 2$$

обратная замена:

$2^x = 1$ $\quad 2^x = 2^0$ $\quad x_1 = 0$

обратная замена:

$2^x = 2$ $\quad 2^x = 2^1$ $\quad x_2 = 1$